# PROBABILIDAD

## EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS.

Consideremos los siguientes experimentos:

a) Extraer una carta de una baraja española.

b) Lanzar una moneda sobre el suelo y anotar el resultado de la cara que aparece.

c) Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.

d) Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua.

De estos experimentos hay unos cuyos resultados podemos predecir de antemano, otros no.

Por ejemplo, en el experimento de dejar caer una piedra verticalmente observamos que, repitiéndolo bajo análogas condiciones, la piedra cae verticalmente con la aceleración de la gravedad.

A estos experimentos, que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado, los llamaremos **experimentos deterministas.**

Por el contrario, llamaremos **experimentos aleatorios** a aquellos que, al repetirlos en análogas condiciones, jamás se puede predecir el resultado que se obtiene.

En los ejemplos anteriores son experimentos aleatorios a y b y deterministas c y d.

Llamaremos **espacio muestral** de un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

Al espacio muestral de un experimento lo designaremos por E.

*EJEMPLO:*

El espacio muestral asociado al experimento que consiste en el lanzamiento de un dado, en cuyas caras están escritos los números del 1 al 6, y anotar los resultados obtenidos en las caras superiores, es:

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los elementos del espacio muestral.

**Suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral E. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas A, B, C,....

*EJEMPLO:*

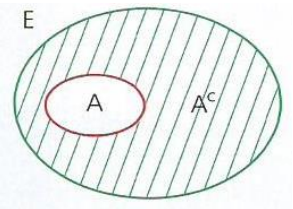
Al lanzar un dado que salga un número par, $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

**Suceso seguro** es aquel que está formado por todos los resultados posibles del experimento, y, por tanto, coincide con el espacio muestral.

**Suceso imposible** es el que no posee ningún suceso elemental y se representa por $\varnothing$.

Sea E el espacio muestral de un experimento y S uno de los sucesos. Si al realizar el experimento resulta un suceso elemental de S, se dice que S ha sido un **éxito**; de lo contrario se dice que ha sido un **fracaso**. Es decir, se dice que ha ocurrido un suceso cuando, al realizar el experimento, se obtiene alguno de los sucesos elementales que lo forman.

**Suceso contrario** o **complementario** de un suceso A es el formado por los sucesos elementales que no pertenecen a A. Se representa por $\overline{A}$, $A'$ o $A^c$




*EJEMPLO:*

En el espacio muestral $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$A = \{2,\ 4,\ 6\} \Rightarrow \overline{A} = \{1,\ 3, 5\}$

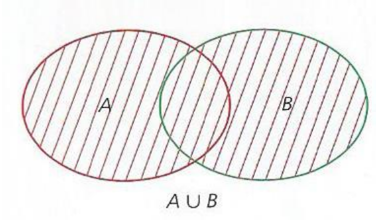
**Sucesos incompatibles** son aquellos que no se pueden verificar simultáneamente, en caso contrario son compatibles.

*EJEMPLO:*

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$ y $B = \{1\}$ son incompatibles.

## OPERACIONES CON SUCESOS

Se denomina **suceso unión**, $A \cup B$, al formado por los sucesos elementales pertenecientes a A ó a B ó a ambos.




* $A \cup E = E$

* $A \cup \varnothing$ =A

* $A \cup \overline{A} = E$

*EJEMPLOS:*

1) En el experimento de lanzar un dado de seis caras numeradas consideramos los sucesos:

" Salir número par" $\rightarrow$ $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

$\Rightarrow$ $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

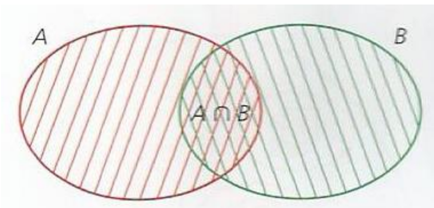
" Salir número primo" $\rightarrow$ $B = \{2,\ 3,\ 5\}$

2) En una baraja española de 40 cartas, consideramos el experimento de extraer una carta al azar. Sean los sucesos:

$A = \{\textit{extraer un as}\}$ $B = \{\textit{extraer}\ \text{un basto}\}$

El suceso $A \cup B$ sería *"extraer un as o un basto"*

Se denomina **suceso intersección**, $A \cap B$, al formado por los sucesos elementales pertenecientes a A y B a la vez.




* $A \cap E = A$

* $A \cap \varnothing = \varnothing$

* $A \cap \overline{A} = \varnothing$

*EJEMPLOS:*

1) En el experimento de lanzar un dado de seis caras numeradas consideramos los sucesos:

" Salir número par" $\rightarrow$ $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

$\Rightarrow$ $A \cap B = \{2\}$

" Salir número primo" $\rightarrow$ $B = \{2,\ 3,\ 5\}$

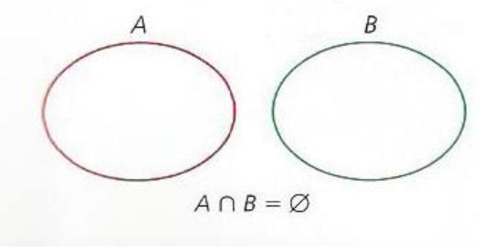
2) En una baraja española de 40 cartas, consideramos el experimento de extraer una carta al azar. Sean los sucesos:

$A = \{extraer\ un\ as\}$ $B = \{extraer \text{ un basto}\}$

El suceso $A \cap B$ sería *"extraer un as de bastos"*

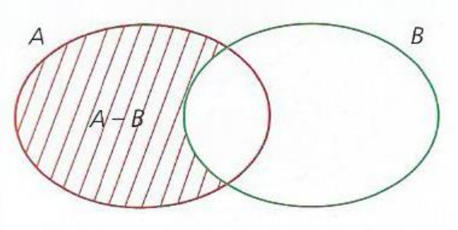
Una forma clara de ver la compatibilidad o incompatibilidad de sucesos será utilizando su intersección.

Diremos que **dos sucesos A y B son incompatibles si** $A \cap B = \varnothing$**,** en caso contrario diremos que son compatibles.




Observa que un suceso y su contrario son incompatibles: $A \cap \overline{A} = \varnothing$

**La diferencia de dos sucesos A y B,** $A - B$, es el suceso formado por los sucesos elementales de A que no están en B.




*EJEMPLO:*

En el experimento de lanzar un dado de seis caras numeradas consideramos los sucesos:

" Salir número par" $\rightarrow$ $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

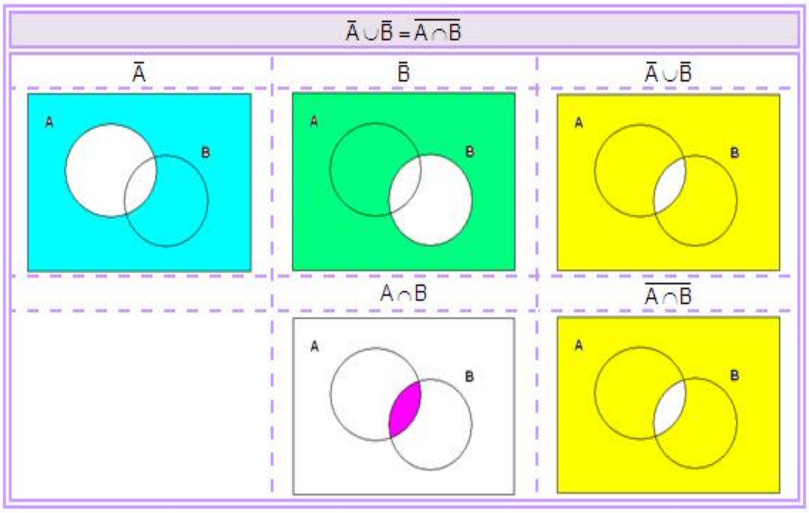
$\Rightarrow$ $A - B = \{4,\ 6\}$

" Salir número primo" $\rightarrow$ $B = \{2,\ 3,\ 5\}$

## LAS LEYES DE MORGAN

Las leyes de Morgan establecen la relación entre la unión e intersección de sucesos y sus complementarios, que son:

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$




*EJEMPLO:*

En el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ se consideran los siguientes sucesos:

$A = \{2,\ 5,\ 6\}$ $B = \{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

Comprueba las leyes de Morgan.

a) $A \cup B = \mathrm{E} \quad \Rightarrow \quad \overline{A \cup B} = \overline{E} = \varnothing$

$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 4\}$ $\overline{B} = \{2,\ 6\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

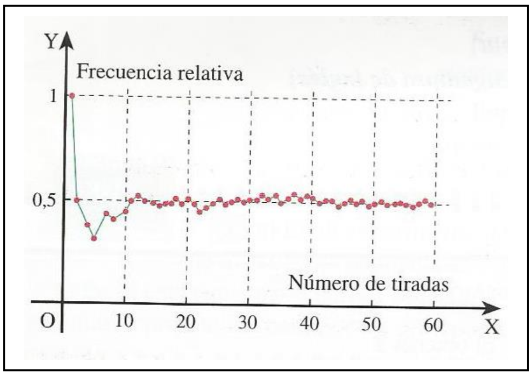
Por tanto: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $A \cap B = \{5\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A \cap B} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 4\}$ $\overline{B} = \{2,\ 6\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

Por tanto: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## IDEA INTUITIVA DE LA PROBABILIDAD




En el experimento aleatorio de lanzar una moneda, si lo realizamos 60 veces, parece razonable pensar que la cara debe salir en unas treinta ocasiones, pues tan fácil parece obtener cara como cruz. Es decir, su frecuencia relativa debe ser, aproximadamente, 1/2, de lo contrario se pensará que la moneda está trucada. En la figura se han anotado los resultados del lanzamiento de una moneda 60 veces, referidos a la frecuencia relativa del suceso *"salir cara"*.
Observa que a medida que aumenta el número de tiradas, la frecuencia de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un cierto número.

Este hecho característico de los experimentos aleatorios se le llama estabilidad de las frecuencias relativas o **ley de los grandes números** y nos va a permitir calcular la probabilidad de un suceso.

*La* ***probabilidad*** *asigna a cada resultado la frecuencia relativa obtenida tras numerosos experimentos.*

(Recuerda que si realizamos n veces un experimento aleatorio y el resultado $x_i$ se ha presentado $n_i$ veces, $n_i$ es la frecuencia absoluta del resultado $x_i$ y $f_i = \frac{n_i}{n}$, la **frecuencia relativa,** cumpliéndose $0 < f_i < 1$).

*EJEMPLO:*

Si anotamos el número de penaltis lanzados y transformados en la liga de fútbol podremos saber que si en una temporada un jugador ha transformado 10 de los 12 penaltis lanzados, su frecuencia relativa es $f_r = \frac{10}{12} = 0{,}83$ ó 83% y ésta será la probabilidad que adjudicaremos a dicho jugador de transformar un penalti.

## DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Es una función P que asigna a cada suceso un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

* La probabilidad del suceso seguro E es 1: $P(E) = 1$

* La probabilidad de cualquier suceso A es un número no negativo, $P(A) \geq 0$

* Si A y B son sucesos incompatibles, la probabilidad del suceso $A \cup B$ es la suma de las probabilidades de A y B:

Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**A partir de la definición axiomática, se deduce:**

* Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

* Para cualquier suceso A:

$0 \leq P(A) \leq 1$

* Para cualquier suceso A:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

* La probabilidad del suceso imposible es cero:

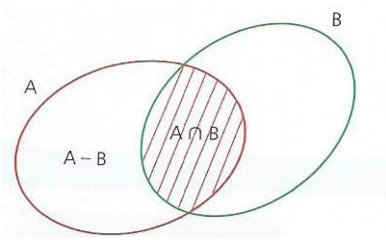
$P(\emptyset) = 0$

* Si A y B son sucesos compatibles, es decir, $A \cap B \neq \emptyset$, entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

* Para dos sucesos cualesquiera A y B se tiene:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$




## PROBABILIDAD DE LAPLACE

La definición de Laplace dice así:

*La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.*

$$P(A) = \frac{n^{o}\, de\, casos\;\; favorables}{\text{nº de casos posibles}}$$

* A la hora de aplicar esta definición hay que tener en cuenta que los sucesos elementales tienen que ser igualmente probables (equiprobables).

* Los casos posibles son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.

* Los casos favorables son los elementos que componen el suceso A.

*EJEMPLOS:*

1) Si lanzamos dos monedas, calcula:

a) Probabilidad de obtener dos caras.

b) Probabilidad de obtener al menos una cara.

El espacio muestral es $E = \{cc,\ \text{cx},\ \text{xc},\ \text{xx}\}$, luego el número de casos posibles siempre será 4.

a) $A = \{obtener\ \text{dos caras}\} = \{cc\}$

De los cuatro posibles, sólo hay uno favorable a nuestra petición, luego $P(A) = \frac{1}{4}$

b) $B = \{obtener\ \text{al menos una cara}\} = \{cc,\ \text{cx},\ \text{xc}\}$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

2) Disponemos de una baraja de 40 cartas. Sea el suceso $A = \{sacar\ un\ oro\}$ y el suceso $B = \{sacar\ \text{una figura}\}$. Calcula la probabilidad de obtener un oro o una figura, al extraer una carta de una baraja.

En una baraja española de 40 cartas hay 10 de cada palo y 12 figuras en total, 3 figuras por palo (sota, caballo y rey).

Así pues:

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Además el suceso $A \cap B$ no es el suceso imposible pues lo forman las tres figuras del palo de oros (oro y figura) y se verifica que:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

Por tanto, la probabilidad pedida de obtener un oro o una figura es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

3) Calcula la probabilidad de obtener una copa o una espada al sacar una carta de una baraja.

Sea $A = \{obtener \text{ una copa}\}$

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$B = \{obtener \text{ una espada}\}$

$$P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Obtener una copa o una espada será $A \cup B$, siendo sucesos incompatibles pues no podemos encontrar una carta que sea copa y espada al mismo tiempo.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4) Sea el experimento consistente en lanzar tres monedas y el suceso

$S = \{obtener\ \ por\ lo\ menos\ una\ cara\}$. Halla $P(S)$.

Podemos obtener la probabilidad de S, a través del suceso contrario,

$\overline{S} = \{obtener \text{ ninguna cara}\} = \{obtener\ tres\ cruces\}$

$P(\overline{S}) = \frac{1}{8}$ (ya que de los ocho casos posibles

$E = \{ccc, \text{cc+}, \text{c}+\text{c}, +\text{cc}, \text{c}++, +\text{c+}, ++\text{c}, +++\}$) sólo uno presenta tres cruces.

Por tanto:

$$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

**PROBABILIDAD CONDICIONADA**

Normalmente el suceso objeto de estudio es en realidad un **suceso compuesto** por dos o más experimentos y en tales casos el cálculo de probabilidades puede simplificarse sensiblemente mediante el concepto de **probabilidad condicionada**.

Un ejemplo nos servirá como introducción:

En un instituto se ha realizado una encuesta y los resultados se muestran en la tabla siguiente:

| | **SI juegan al baloncesto** | **NO juegan al baloncesto** | **TOTAL** |
|---|---|---|---|
| **1º CURSO** | 45 | 15 | 60 |
| **2º CURSO** | 32 | 58 | 90 |
| **TOTAL** | 77 | 73 | **150** |

Se selecciona al azar un alumno y sean los sucesos:

$$P = \{ser \text{ de } 1^{\text{er}} \text{ curso}\}$$

$$J = \{juega\ al\ baloncesto\}$$

se verifica:

$$P(P) = \frac{60}{150} \qquad P(J) = \frac{77}{150} \qquad P(P \cap J) = \frac{45}{150}$$

Si sabemos que dicho alumno es de 1º y se deseara saber entonces cuál es la probabilidad de que juegue a baloncesto, este suceso lo denotaremos por J/P y sería:

$$P(J/P) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ alumnos\ de\ 1^{\text{o}}\ que\ juegan\ al\ baloncesto}{n^{\text{o}} \text{ de alumnos de } 1^{\text{o}}} = \frac{45}{60}$$

Esta probabilidad se llama *probabilidad de J condicionada a P*.

Observa que se verifica:

$$P(J/P)=\frac{45}{60}=\frac{\frac{45}{150}}{\frac{60}{150}}=\frac{P(P\cap J)}{P(P)}$$

Si A y B son dos sucesos de un mismo espacio muestral, se llama **probabilidad del suceso A condicionado al B**, y se escribe $P(A/B)$, a la probabilidad del suceso A sabiendo que el suceso B se ha verificado.

Se verifica:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \text{y} \qquad P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

De estas fórmulas se despeja la probabilidad de la intersección de dos sucesos:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad\qquad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

*EJEMPLO:*

Halla la probabilidad de que al extraer sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, resulten ser dos ases:

a) Sin devolver al mazo la primera carta extraída.

b) Devolviéndola antes de la segunda extracción.

Sean los sucesos:

$1A=\{la \text{ primera carta es un as}\}$ $\qquad$ $2A=\{la \text{ segunda carta es un as}\}$

Se quiere calcular la probabilidad de que la primera sea as y la segunda sea as, es decir $P(1A\cap 2A)$

a) *Sin devolución*. Lo obtenido en la primera extracción condiciona a la segunda, luego:

$$P(1A\cap 2A)=P(1A)\cdot P(2A/1A) \Rightarrow P(1A\cap 2A)=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{1}{130}\cong 0{,}0077$$

Siendo $P(2A/1A)=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}$ ya que al no devolver la primera carta, el espacio muestral (los casos posibles) se han reducido a 39, y como la primera se supone que era un as, los casos favorables son en estos momentos 3.

b) *Con devolución*.

$$P(1A\cap 2A)=P(1A)\cdot P(2A/1A)\ \Rightarrow\ P(1A\cap 2A)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{100}=0{,}01$$

pues en cada suceso partimos de la misma situación, 40 cartas y 4 de ellas son ases.
**SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES**

**Un suceso A es independiente de B** si $P(A)=P(A/B)$, en caso contrario, A es dependiente de B.

Si A y B son independientes entonces:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

* Cuando se extraen dos bolas de una urna "con devolución", al extraer la segunda bola se tienen otra vez todas las bolas iniciales y el segundo resultado es independiente de lo que se haya obtenido anteriormente.

Cuando se extraen dos bolas de una urna "sin devolución", al extraer la segunda bola, falta la que se ha obtenido anteriormente y el segundo resultado depende de lo que se haya obtenido anteriormente.

* En el lanzamiento sucesivo de una moneda el resultado anterior no condiciona el siguiente. Por tanto, en cada nueva tirada la probabilidad de cara será la misma que la de cruz: cada lanzamiento es independiente del anterior.

* En la práctica puede suceder que la dependencia o independencia de sucesos se deduzca de forma evidente de los mismos enunciados. Si no fuera así recurrimos a la fórmula dada.

*EJEMPLO:*

En el experimento de lanzar tres monedas sean los sucesos:

$A=\{\textit{obtener una cara como máximo}\}$ y $B=\{\textit{obtener}\text{ cara y cruz}\}$

¿Son A y B dependientes o independientes?

El espacio muestral es $E=\{ccc, \text{cc+}, \text{ c+c}, \text{+cc}, \text{c++}, \text{+c+}, \text{++c}, \text{+++}\}$ y los sucesos son:

$A=\{c{+}{+}, {+}c{+}, {+}{+}c, {+}{+}{+}\}$, luego $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$B=\{cc{+}, c{+}c, {+}cc, c{+}{+}, {+}c{+}, {+}{+}c\}$, luego $P(B)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$A\cap B=\{c{+}{+}, {+}c{+}, {+}{+}c\}$ y por tanto $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$ A y B son independientes.

**TABLAS DE CONTINGENCIA**

Un método muy útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante el empleo de tablas de doble entrada, denominadas **tablas de contingencia**. Veamos un ejemplo:

Para tratar de curar una enfermedad se ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de individuos, obteniéndose los resultados reflejados en la tabla:

| | **CURADOS** | **NO CURADOS** | **TOTALES** |
|---|---|---|---|
| **TRATAMIENTO NUEVO** | **60** | **21** | **81** |
| **TRATAMIENTO ANTIGUO** | **43** | **36** | **79** |
| | **103** | **57** | **160** |

Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:

a) Que se haya curado.

P(que se haya curado) = $\frac{103}{160}$

b) No se haya curado.

P(no se ha curado) = $\frac{57}{160}$

c) Que se haya curado con el nuevo tratamiento.

P(que se haya curado/ con el nuevo tratamiento) = $\frac{60}{81}$

d) Que no se haya curado con el nuevo tratamiento.

P(que no se haya curado/ con el nuevo tratamiento) = $\frac{21}{81}$

e) Que se haya curado con el tratamiento antiguo.

P(que se hay curado/ con el tratamiento antiguo) = $\frac{43}{79}$

f) Que no se haya curado con el tratamiento antiguo.

P(que no se haya curado/ con el tratamiento antiguo) = $\frac{36}{79}$

* En las celdas de las tablas de contingencia pueden figurar frecuencias absolutas, frecuencias relativas, porcentajes y probabilidades.

* No es preciso que nos den todos los datos de la tabla, pues es posible construirlas completando unas celdas a partir de otras.

**** En general, una tabla de contingencia de 2 x 2, con probabilidades, es de la forma:***

| | **A** | $\overline{A}$ | **TOTALES** |
|---|---|---|---|
| **B** | $P(A \cap B)$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\overline{B}$ | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{B})$ |
| **TOTALES** | $P(A)$ | $P(\overline{A})$ | **1** |

*EJEMPLO:*

En una cierta ciudad el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar.

Calcula:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ni cabellos ni ojos castaños?

Sean los sucesos C = "Tener cabellos castaños"  O = "Tener los ojos castaños"

Colocando los datos de que disponemos en la tabla de contingencia tendríamos:

| | **C** | $\overline{C}$ | **TOTAL** |
|---|---|---|---|
| **O** | **0,15** | | **0,25** |
| $\overline{O}$ | | | |
| **TOTAL** | **0,40** | | **1** |

Calculando los datos que nos faltan obtendríamos:

| | C | $\overline{C}$ | TOTAL |
|---|---|---|---|
| **O** | **0,15** | 0,10 | **0,25** |
| $\overline{O}$ | 0,25 | 0,50 | 0,75 |
| **TOTAL** | **0,40** | 0,60 | 1 |

Entonces:

a) $P(O/C)=\dfrac{P(O\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0{,}15}{0{,}40}=0{,}375$ pues el espacio muestral se reduce a los que tienen cabellos castaños (el 40%) y, de ellos, el 15% tiene ojos castaños.

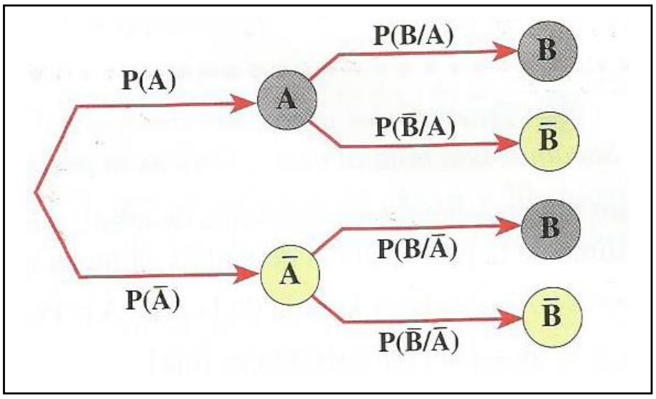
b) $P(\overline{C}/O)=\dfrac{P(\overline{C}\cap O)}{P(O)}=\dfrac{0{,}10}{0{,}25}=0{,}4$ ya que el espacio muestral lo forman los que tienen ojos castaños (25%) y de ellos el 10% no tienen cabellos castaños.

c) La probabilidad pedida se obtiene directamente de la tabla y es $P(\overline{C}\cap\overline{O})=0{,}5$

## DIAGRAMA EN ÁRBOL

Un diagrama en árbol es otra forma de representar determinadas situaciones, en particular para sucesos compuestos.

La situación elemental es:




Para componer un diagrama de árbol y obtener la probabilidad deseada a partir de él, hemos de tener en cuenta las siguientes normas:

* En la formación del árbol se abrirán tantas ramificaciones como resultados posibles tenga el experimento. a veces se pueden obviar algunas de dichas ramas, puesto que corresponden a resultados que no intervienen en el suceso cuya probabilidad se busca.

* En cada una de las ramas se indicará la probabilidad del suceso correspondiente.

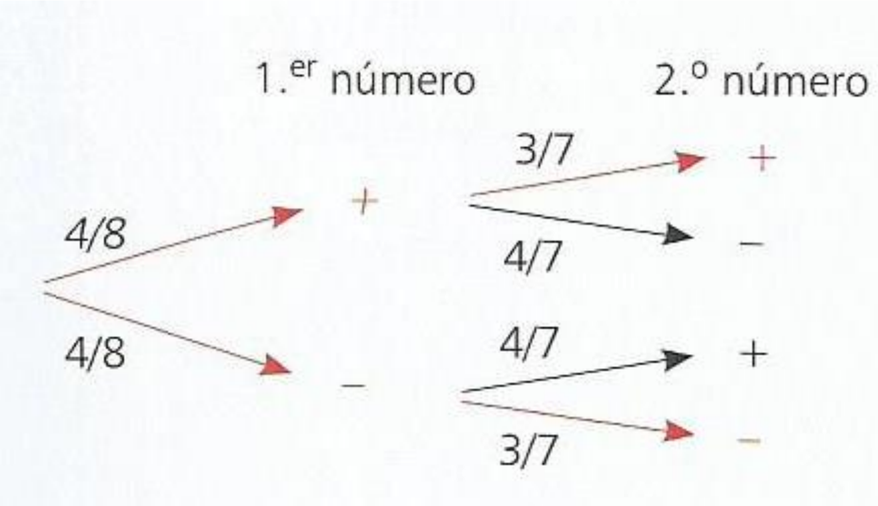
* Una vez formado el árbol, para calcular la probabilidad del suceso que representa una de sus ramas, se multiplican las probabilidades que aparecen a lo largo de dicha rama.

* Si un suceso comprende varias ramas, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de todas ellas, que se calculan según se indica en el punto anterior.

* En cualquier diagrama de árbol, la suma de las probabilidades de todas las ramas que parten del mismo punto es igual a uno.
*EJEMPLO:*

Se consideran ocho números, cuatro de ellos positivos y los otros cuatro negativos. Elegimos dos de ellos al azar y los multiplicamos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número positivo?

Observando el siguiente diagrama de árbol, la probabilidad pedida es:

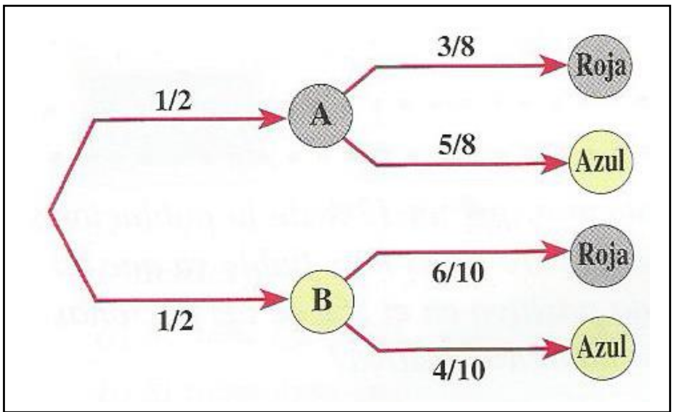



$$P(obtener \text{ resultado positivo}) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

**PROBABILIDAD TOTAL**

*Tenemos dos urnas, la urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y la urna B con 6 rojas y 4 azules. Sacamos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?*

Si construimos el correspondiente diagrama de árbol, nos encontramos con dos ramas o caminos que nos llevan a la bola roja, la suma de la probabilidad de ambos caminos nos dará la probabilidad total.



Sean los sucesos:

$$A = \{extraer \text{ la bola de la urna A}\} \qquad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{extraer \text{ la bola de la urna B}\} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$R = \{la \text{ bola extraída es roja}\}$$

$$P(R/A) = \frac{3}{8}$$

$$P(R/B) = \frac{6}{10}$$

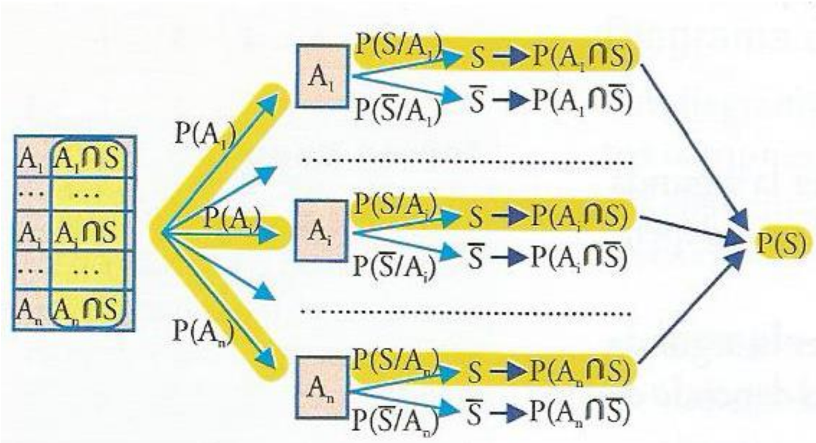
$$P(R) = P(R/A)\cdot P(A) + P(R/B)\cdot P(B) \qquad \Rightarrow \qquad P(R) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}4875$$

***Si*** $A_1, \mathrm{A}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathrm{A}_n$ ***son sucesos incompatibles dos a dos tales que***

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = E$***, la probabilidad de cualquier suceso B de E es:***

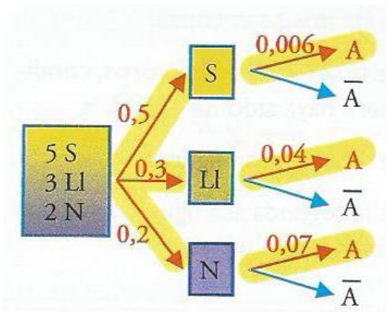
$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

**fórmula llamada de la probabilidad total.**




*EJEMPLO:*

Durante 10 días en una carretera de alta montaña ha hecho 5 días sol, 3 días ha llovido y 2 días hubo niebla. La probabilidad de que haya un accidente de coche en dicha carretera en un día soleado es de 0,006, en un día lluvioso de 0,04 y en un día con niebla de 0,07. Halla la probabilidad de que un determinado día haya accidente.




$$P(A) = P(S)\cdot P(A/S) + P(LI)\cdot P(A/LI) + P(N)\cdot P(A/N)$$

$$P(A) = 0{,}5\cdot 0{,}006 + 0{,}3\cdot 0{,}04 + 0{,}2\cdot 0{,}07 = 0{,}029$$

# FORMULARIO

**Probabilidad de Laplace** de un suceso S: $P(S) = \dfrac{n^{\circ}\text{ casos favorables}}{n^{\circ}\text{ casos posibles}}$ siempre que todos los sucesos elementales se estimen equiprobables.

**Consecuencias:**
1. $P(E) = 1$ (E es el espacio muestral o suceso seguro)
2. $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ es el suceso imposible)
3. Si $A \subseteq E$ entonces $0 \le P(A) \le 1$

**Probabilidad de la unión:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Probabilidad de la intersección:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

**Probabilidad condicionada:** $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

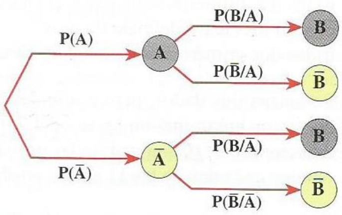
A y B son **sucesos independientes** si $P(A/B) = P(A)$ ó $P(B/A) = P(B)$.

A y B son **sucesos dependientes** si $P(A/B) \neq P(A)$ ó $P(B/A) \neq P(B)$.

Si A y B son **independientes:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

**Tablas de contingencia y diagramas en árbol**

| | $A$ | $\bar{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| Total | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 |




**Probabilidad total**

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$) y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, la probabilidad de cualquier suceso B de E es:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

que es la fórmula de la **probabilidad total**.