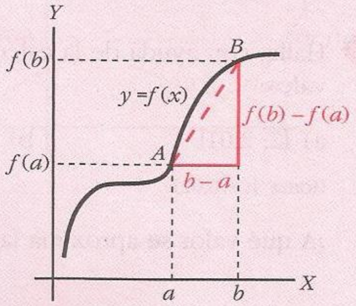
CONCEPTO DE DERIVADA

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

- La **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$, en un intervalo $[a, b]$ se define de la siguiente manera:

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- La T.V.M. $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.
- La T.V.M. $[a, b]$ representa el crecimiento medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
- Si designamos el intervalo como $[a, a + \text{h}]$ (h es la longitud del intervalo), entonces queda:

$$\text{T.V.M. } [a, a + \text{h}] = \frac{f(a + \text{h}) - f(a)}{\text{h}}$$

ACTIVIDADES

1) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en cada uno de los siguientes intervalos:

a) $[-1, 1]$ b) $[-1, 2]$ c) $[0, 2]$ d) $[1, 3]$

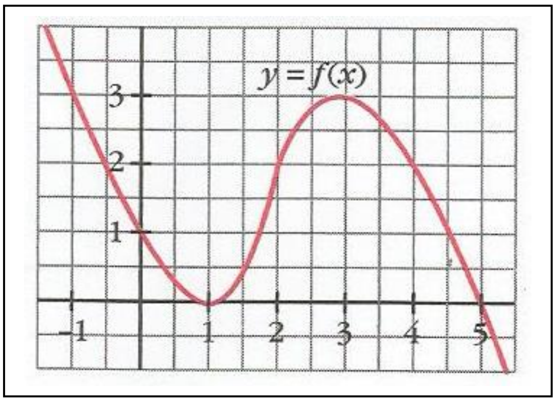
2) Halla la T.V.M. de esta función en los intervalos que se indican:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 3]$

c) $[0, 2]$

d) $[3, 5]$



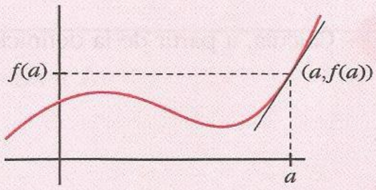
DERIVADA EN UN PUNTO

- Dada una función, $y = f(x)$, y un punto, $(a, f(a))$, se define la **derivada de $f(x)$ en $x = a$** como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si llamamos $x - a = h$, entonces la definición queda así:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



- $f'(a)$ es la **pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y mide el **crecimiento de la función en ese punto.**

EJERCICIO RESUELTO

Halla, a partir de la definición, la derivada de cada una de estas funciones en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

RESOLUCIÓN

a) $f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h)^2 - 1) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2(1 + h^2 + 2h) - 1 - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{2 + 2h^2 + 4h - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h(2h + 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 4) = 4$

Por tanto: $f'(1) = 4$

b) $g'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{(1+h)+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h+2} - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2 - h - 2}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-h}{h+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-h}{h(h+2)} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-1}{h+2} = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto: $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

ACTIVIDADES

1) Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x)=x^2+3x$ en el punto de abscisa x = 2.

2) Obtén, a partir de la definición, la derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ en el punto $(-1,1)$.

3) Calcula, utilizando la definición de derivada, el valor de $f'(1)$, siendo $f(x)=\dfrac{4x+1}{3}$

FUNCIÓN DERIVADA

Función derivada:

Llamamos **función derivada de *f*** (o simplemente **derivada de *f***) a la función:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

EJERCICIO RESUELTO

a) Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x)=x^2-3x+1$.

b) Calcula $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(1{,}5)$.

RESOLUCIÓN

a) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)+1-(x^2-3x+1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-3x-3h+1-x^2+3x-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-3)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x-3)=2x-3$$

b) Como ya tenemos $f'(x)$, los resultados son inmediatos:

$f'(0)=-3;\ f'(-1)=-5;\ f'(2)=1;\ f'(1{,}5)=0$

ACTIVIDADES

1) Halla, a partir de la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x+1$ b) $f(x)=\dfrac{3-x}{2}$ c) $f(x)=x^2$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA POTENCIA, DE UNA SUMA Y DEL PRODUCTO POR UN NÚMERO

- $f(x) = k$ (constante) $\rightarrow$ $f'(x) = 0$
- $f(x) = x$ $\rightarrow$ $f'(x) = 1$
- $f(x) = x^n$ $\rightarrow$ $f'(x) = nx^{n-1}$
- $F(x) = f(x) \pm g(x)$ $\rightarrow$ $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $F(x) = k \cdot f(x)$ $\rightarrow$ $F'(x) = k \cdot f'(x)$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 2x - 1$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{3}{5x^4}$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

RESOLUCIÓN

a) $f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{4} \cdot 3x^2 + 2 = 4x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 2$

b) $f(x) = x^{1/2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{3}{5}x^{-4} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = \frac{-12}{5}x^{-5} = \frac{-12}{5x^5}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^{1/3}} = x^{2-1/3} = x^{5/3} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

OTRAS REGLAS DE DERIVACIÓN

- $F(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad F'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = x\ln x$ b) $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ c) $f(x) = 2^x$ d) $f(x) = \log x$

e) $f(x) = xe^x$

RESOLUCIÓN:

a) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

b) $f'(x) = \dfrac{4 \cdot (x+1) - 4x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{4x+4-4x}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} = \dfrac{1}{x\ln 10}$

e) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA. REGLA DE LA CADENA

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- $F(x) = (f(x))^n \quad \rightarrow \quad F'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
- $F(x) = e^{f(x)} \quad \rightarrow \quad F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $F(x) = a^{f(x)} \quad \rightarrow \quad F'(x) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
- $F(x) = \ln(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $F(x) = \log_a(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^6$ b) $f(x) = e^{2x^3 - 5x}$ c) $f(x) = 3^{x^2}$

d) $f(x) = \ln(2x^4 + 3x^2)$ e) $f(x) = \log(3x - 1)$

RESOLUCIÓN:

a) $f'(x) = 6(3x^2 - 2x + 5)^5 \cdot (6x - 2)$

b) $f'(x) = e^{2x^3 - 5x} \cdot (6x^2 - 5)$

c) $f'(x) = 3^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 3$

d) $f'(x) = \dfrac{8x^3 + 6x}{2x^4 + 3x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{3}{3x - 1} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} = \dfrac{3}{(3x - 1)\ln 10}$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

La ecuación de la recta tangente en el punto P(a, f(a)) es:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

EJERCICIO RESUELTO:

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ en el punto de abscisa x = 1

RESOLUCIÓN:

a) Hallamos $f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

b) Derivamos la función:

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

c) Calculamos $f'(1)=\dfrac{-2\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}$

d) Escribimos la ecuación:

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1) \;\rightarrow\; 2y=1-x+1 \;\rightarrow\; x+2y-2=0$$

ACTIVIDADES

1) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\ln(x-1)$ en el punto de abscisa x = 2

2) Halla los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $y=x^3-4x$ y escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a dicha función en los puntos obtenidos.

3) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+3x-7$ en el punto donde corta al eje de ordenadas.

CÁLCULO DE LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

1) Calculamos el dominio D de la función.

2) Obtenemos los valores (puntos singulares) que anulan la derivada de la función, es decir resolvemos la ecuación $f'(x)=0$

3) Descomponemos el dominio D en un conjunto de intervalos determinados por aquellos valores obtenidos en el apartado anterior.

4) Estudiamos el signo de la función derivada en cada uno de los intervalos obtenidos.

5) La función será creciente en los intervalos en los que la derivada es positiva y decreciente en aquellos en los que la derivada es negativa.

EJERCICIO RESUELTO:

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$

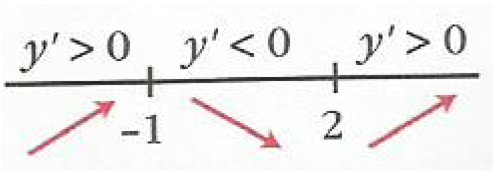
RESOLUCIÓN:

1) $D=R$

2) Calculamos $f'(x)=6x^2-6x-12$ y resolvemos la ecuación $f'(x)=0$:

$6x^2-6x-12=0 \;\rightarrow\; \text{x}=\text{-1}, \quad \text{x}=2$

3 y 4)



5) La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-1,2)$

ACTIVIDAD

Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+7$

CÁLCULO DE LOS EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Para determinar los máximos y mínimos relativos de una función, calculamos los puntos que anulan la primera derivada y estudiamos si en esos puntos hay un cambio de monotonía.

Existe otro procedimiento denominado criterio de la segunda derivada:

* Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, entonces en x = a hay un máximo relativo.

* Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, entonces en x = a hay un mínimo relativo.

EJERCICIO RESUELTO:

En el ejemplo anterior, en x = -1 se alcanza un máximo relativo porque la función crece a la izquierda de x = -1 y decrece a la derecha de ese punto:

x = -1 $\rightarrow$ $f(-1)=7$ $\rightarrow$ El punto $(-1,7)$ es un máximo relativo

En x = 2 se alcanza un mínimo relativo porque la función decrece a la izquierda de x = 2 y crece a la derecha de x = 2:

x = 2 $\rightarrow$ $f(2)=-20$ $\rightarrow$ El punto $(2,-20)$ es un mínimo relativo

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x)=12x-6$$

$f''(-1)=-18<0$ $\rightarrow$ en x = -1 hay un máximo relativo

$f''(2)=18>0$ $\rightarrow$ en x = 2 hay un mínimo relativo

Para hallar las ordenadas de los puntos, sustituimos en $f(x)$:

$f(-1)=7$ $\rightarrow$ $(-1,7)$ es un máximo relativo.

$f(2)=-20$ $\rightarrow$ $(2,-20)$ es un mínimo relativo.

ACTIVIDAD

Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-2x^2-8$ b) $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$

RESUMEN

REGLAS DE DERIVACIÓN

Producto por una constante	$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$
Suma y diferencia de funciones	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Producto de dos funciones	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente de dos funciones	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Composición	$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Tipos de funciones	Simples		Compuestas	
Función constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$		
Función identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
Función potencial	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = (f(x))^n$	$F'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
Funciones exponenciales	$f(x) = e^x$ $f(x) = a^x$	$f'(x) = e^x$ $f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$F(x) = e^{f(x)}$ $F(x) = a^{f(x)}$	$F'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$ $F'(x) = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
Funciones logarítmicas	$f(x) = \ln x$ $f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$F(x) = \ln(f(x))$ $F(x) = \log_a(f(x))$	$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$